



# עבודת קיץ למסיימי כיתה י' 4/5

## **תלמידים יקרים,**

העבודה מסכמת את כל החומר הנלמד במשך השנה.

חשוב להכין את העבודה ברצינות על מנת להגיע מוכנים לקראת שנה"ל הבאה.

חופשה נעימה והמון בהצלחה!

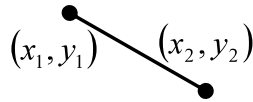
יצחק

## גיאומטריה אנליטית

### הקו הישר

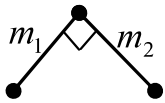
פתרון תרגילים בנושא הקו הישר דורש היכרות עם מספר נוסחאות המאפשרות לנו למצוא מרחקים, שיפועים ושיעורי נקודות. נציג את הנוסחאות הללו:

#### שיפועים ויחסים



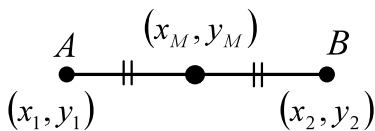
שיפוע ישר העובר דרך שתי נקודות נתונות יחושב לפי הנוסחה:  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .

משוואת קו ישר ששיפועו  $(m)$  העובר בנקודה  $(x_1, y_1)$  היא:  $y - y_1 = m(x - x_1)$ .



שני ישרים המאונכים זה לזה, שיפועיהם  $(m_2$  ו-  $m_1)$  הופכיים ונגדיים:  $m_1 \cdot m_2 = -1$ .

הופכים את השבר ואת הסימן, כך לדוגמא שיפועים של אנכים:  $\frac{3}{4}$  ו-  $-\frac{4}{3}$  או:  $\frac{1}{2}$  ו-  $-2$  או:  $1$  ו-  $-1$ .

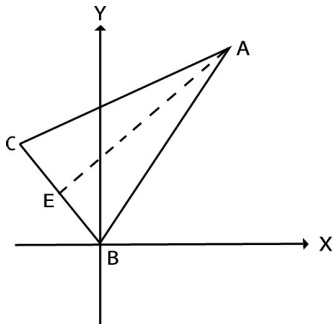


אמצע הקטע AB המופיע בשרטוט הוא הממוצע של שיעורי קצות

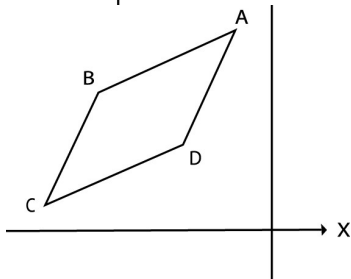
הקטע:  $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$  ו-  $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$ .

המרחק בין הנקודות  $A(x_1, y_1)$  ו-  $B(x_2, y_2)$  ניתן לחישוב באמצעות הנוסחה:  $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ .

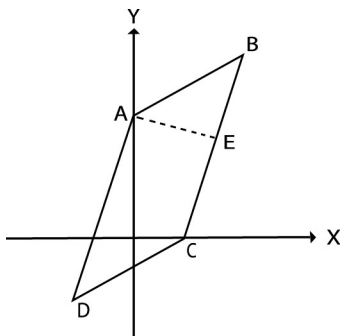
**תרגילים - הקו הישר**



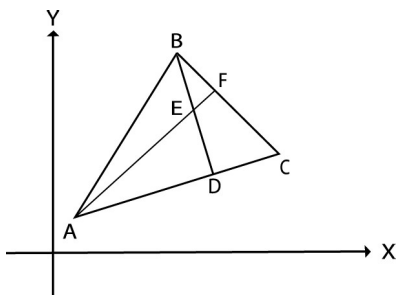
1. במשולש שווה השוקיים  $\triangle ABC$  ( $AC=AB$ ) נתון הקודקוד  $A(4,8)$ .
  - א. מצא את שיעורי הקודקוד C.
  - ב. חשב את שטח המשולש  $\triangle ABC$ .
  - ג. מצא את משוואת קטע האמצעים במשולש המקביל ל-BC.



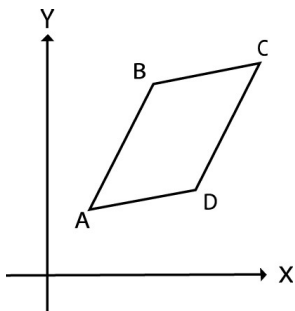
2. אלכסונו המעוין ABCD נחתכים בנקודה E. משוואת האלכסון AC היא:  $y = x + 9$ . נתון הקודקוד  $B(-6,5)$ .
  - א. מצא את שיעורי הנקודות D ו-E.
  - ב. הקודקוד A נמצא על הישר  $y = 7$ . מצא את שיעורי הקודקוד C.
  - ג. חשב את שטח המעוין ABCD.



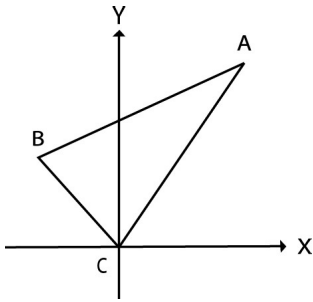
3. במקבילית ABCD, הקודקודים A ו-C נמצאים על ציר ה-y ועל ציר ה-x בהתאמה. הישר AE הוא הגובה לצלע BC ומשוואתו  $y = -\frac{1}{3}x + 4$ . משוואת הצלע CD היא:  $y = \frac{x}{2} - 1$ .
  - א. מצא את שיעורי קודקודי המקבילית.
  - ב. חשב את שטח המקבילית.
  - ג. מצא את משוואת קטע האמצעים ב- $\triangle ABE$ , המקביל לצלע BE.



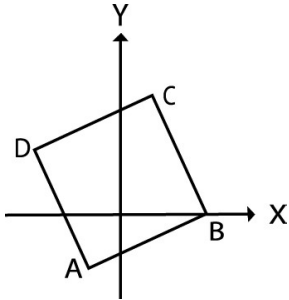
4. במשולש  $\triangle ABC$  נתונים הקודקודים  $A(1,1)$  ו- $B(5,9)$ . הגבהים BD ו-AF נחתכים בנקודה  $E(6,6)$ .
  - א. מצא את משוואת הישר BC.
  - ב. מצא את שיעורי הקודקוד C.
  - ג. חשב את שטח המשולש  $\triangle ABC$ .



5. במקבילית ABCD משוואת הישר AB היא:  $y = 3x - 3$  ומשוואת הישר AD היא:  $y = \frac{1}{4}x + 2.5$ . אחד מקודקודי המקבילית בנקודה  $(8,10)$ .
  - א. מצא את משוואת האלכסון BD.
  - ב. שרטט את המקבילית במדויק על מערכת הצירים. מהנקודות C ו-D מורידים אנכים לציר ה-x, אשר חותכים את ציר ה-x בנקודות E ו-F בהתאמה. חשב את שטח הטרפז CDFE.



12. במשולש שווה שוקיים  $\triangle ABC$  ( $AB=AC$ ), הקודקוד C נמצא בראשית הצירים. שיפוע הצלע AC הוא 2. שיעור ה-y של הקודקוד A גדול ב-4 יח' משיעור ה-x שלו.
- מצא את שיעורי הקודקוד A.
  - שיפוע הגובה היוצא מהנקודה A הוא 1. חשב את שטח המשולש.
  - חשב את הזווית החדה שבין המשך הצלע AB לבין ציר ה-x.



13. במעוין ABCD נתונים הקודקודים  $B(4,0)$  ו-  $D(-4,4)$ . אורך האלכסון AC הוא  $4\sqrt{5}$ . הקודקוד C נמצא ברביע הראשון.
- מצא את שיעורי הקודקודים A ו-C.
  - הוכח שהמעוין ABCD הוא ריבוע וחשב את שטחו.

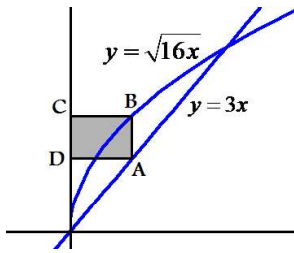
14. במשולש שווה שוקיים  $\triangle ABC$  ( $AB=AC$ ) שיפוע הבסיס הוא -1. נתון הקודקוד  $B(-4,4)$ . הקודקוד C נמצא על ציר ה-y. משוואת אחת משוקי המשולש היא  $y = 2x$ .
- מצא את שיעורי הקודקודים A ו-C.
  - מצא את שיעורי נקודת מפגש התיכונים במשולש  $\triangle ABC$ .
  - מצא את משוואת קטע האמצעים המקביל לצלע AC.

15. במשולש שווה שוקיים  $\triangle ABC$  ( $AB=AC$ ) נתונה משוואת הבסיס  $y = -x + 5$ . נתונים שיעורי הקודקודים A  $(7,6)$  ו-B  $(1,4)$ .
- מצא את משוואת הגובה היוצא מהנקודה A.
  - חשב את שטח המשולש  $\triangle ABC$ .
  - חשב את אורך קטע האמצעים המקביל לבסיס BC.

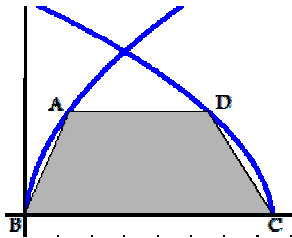
16. במשולש  $\triangle ABC$  הנקודה D היא אמצע BC. DE אנך אמצעי ל-BC. משוואת האנך DE היא  $y = \frac{1}{2}x + 1$ . משוואת התיכון AD היא  $y = \frac{1}{3}x + 1$ .
- מצא את שיעורי הנקודה D ואת משוואת הצלע BC.
  - נתון שמשוואת AB היא  $y = 1.5x + 4.5$ .
  - מצא את שיעורי הקודקודים B ו-C.

**פתרונות:**

- א.  $C(-4,4)$ . ב. 24 יח"ר. ג.  $y = -x + 6$ . ד.  $E(-5,4)$ ,  $D(-4,3)$ . ה.  $C(-8,1)$ . ו. 12 יח"ר.
- א.  $A(0,4)$ ,  $B(4,6)$ ,  $C(2,0)$ ,  $D(-2,-2)$ . ב. 20 יח"ר. ג.  $y = 3x - 1$ . ד. 4. א.  $y = -x + 14$ .
- ב.  $C(10,4)$ . ג. 30 יח"ר. ד. 5. א.  $y = -2.5x + 19$ . ב. 14 יח"ר. ג.  $\sqrt{20} = 4.47$ . ד. יח' אורך. ה. 40 יח"ר.
- א.  $(5,5.5)$ . ב. 34 יח"ר. ג. 8. א.  $y = 2x - 10$ . ב. 20 יח"ר. ג.  $63.43^\circ$ . ד. 9. א. -1. ב.  $y = x + 10$ .
- ג.  $A(4,2)$ ,  $C(3,3)$ ,  $C(0,3)$ . ב.  $\sqrt{20} = 4.47$ . יח' אורך = AC. ג. 5 יח"ר. ד. 11. א.  $D(2,0)$ .
- ב.  $A(1,3)$ ,  $B(10,6)$ ,  $C(11,3)$ . ג. 30 יח"ר. ד. 12. א.  $A(4,8)$ . ב. 24 יח"ר. ג.  $26.565^\circ$ .
- א.  $A(-2,-2)$ ,  $C(2,6)$ . ב. 40 יח"ר. ד. 14. א.  $A(4,8)$ ,  $C(0,0)$ . ב.  $(0,4)$ . ג.  $y = 2x + 6$ .
- א.  $y = x - 1$ . ב. 16 יח"ר. ג.  $\sqrt{8} = 2.82$ . יח' אורך. ד. 16. א.  $D(6,3)$ ,  $y = -2x + 15$ . ב.  $B(3,9)$ ,  $C(9,-3)$ .



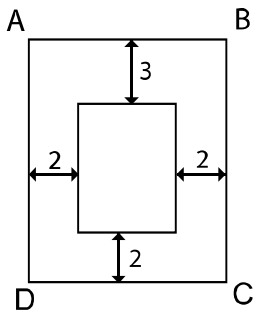
11. הנקודה A נמצאת על הישר  $y = 3x$ , והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x) = \sqrt{16x}$  כמתואר בשרטוט. הנקודות C ו-D נמצאות על ציר ה-y כך שמתקבל המלבן ABCD.
- א. חשב את השטח המקסימלי של המלבן ABCD.
- ב. כאשר שטח המלבן ABCD מקסימלי, חשב את היקפו.



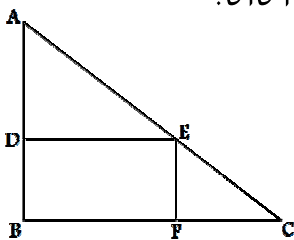
12. בשרטוט מופיעים הגרפים של הפונקציות  $f(x) = \sqrt{3x}$  ו-  $g(x) = \sqrt{30-2x}$ . הנקודות החותכים את ציר ה-x בנקודות B ו-C בהתאמה כמתואר בשרטוט. הנקודות A ו-D נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$  כמתואר בשרטוט, כך שהישר AD מקביל לציר ה-x. מצא את שיעור ה-x של הנקודה A, שעבורה שטח הטרפז ABCD יהיה מקסימלי.

### בעיות גיאומטריות

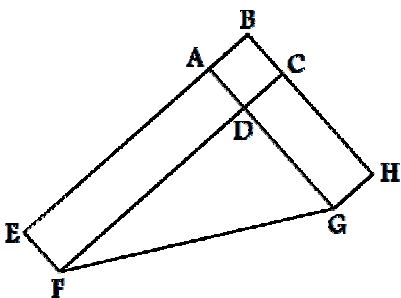
#### פונקציות פולינום



13. בתוך מלבן ABCD שהיקפו 32 מ', מציירים מלבן פנימי קטן יותר. צלעות המלבנים מקבילות זו לזו כמתואר בשרטוט והמרחקים ביניהן מופיעים בשרטוט. נסמן באמצעות x את הרוחב AB.
- א. מצא את x שעבורו שטח המלבן הפנימי יהיה מקסימלי.
- ב. כאשר שטח המלבן הפנימי הוא מקסימלי, חשב את היקפו.



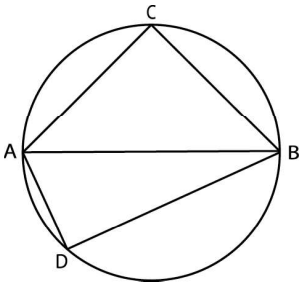
14. במשולש  $\triangle ABC$  ישר הזווית ( $\angle B = 90^\circ$ ) חסום המלבן BDEF כמתואר בשרטוט. נתון:  $AB = 12$  ס"מ,  $BC = 16$  ס"מ.
- א. מצא את האורכים של צלעות המלבן, עבורן יהיה שטח המלבן מקסימלי.
- ב. כאשר שטח המלבן מקסימלי, חשב את היחס בין שטחו לבין שטח המשולש  $\triangle ADE$ .



15. על צלעות הריבוע ABCD בנו שני מלבנים. היקף המלבן CDGH הוא 20 ס"מ. נתון:  $AE = 5BC$ .
- א. מצא את אורך צלע הריבוע ABCD שעבורו שטח המשולש  $\triangle DFG$  הוא מקסימלי.
- ב. חשב את השטח המקסימלי של המשולש  $\triangle DFG$ .

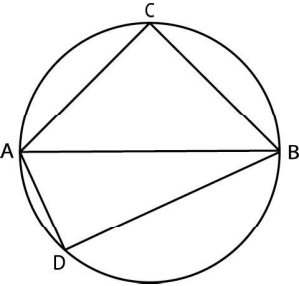
#### פונקציות מנה

- א. חשב את אורכי הניצבים שעבורם היקף המשולש יהיה מקסימלי.  
 ב. כאשר היקף המשולש יהיה מקסימלי, חשב את שטחו.



23. הנקודות C ו-D נמצאות על מעגל שקוטרו AB.  
 נתון:  $BC = AC = 4$  ס"מ

- א. חשב את אורך AD, שעבורו שטח המרובע ABCD מקסימלי.  
 ב. כאשר שטח המרובע ABCD מקסימלי, חשב את היקפו.



24. הנקודות C ו-D נמצאות על מעגל שקוטרו AB.  
 נתון:  $BC = AC = 2$  ס"מ

- א. חשב את אורך AD, שעבורו היקף המרובע ABCD מקסימלי.  
 ב. כאשר היקף המרובע ABCD מקסימלי, חשב את השטח הכולל בין המרובע ABCD, לבין המעגל.

### בעיות העוסקות במספרים

#### פונקציות פולינום

25. ההפרש בין שני מספרים הוא 4.

- א. מצא את המספרים, בהינתן שמכפלתם מינימלית.  
 ב. מצא את המכפלה המינימלית.

26. סכומם של שני מספרים הוא 30. מכפילים את ריבועו של המספר הראשון (x) במספר השני.  
 מצא את המספרים שעבורם מכפלה זו:

- א. מקסימלית.  
 ב. מינימלית.

27. סכומם של שלושה מספרים הוא 54. המספר השני גדול פי שלושה מהראשון. מצא את המספרים, אם נתון שמכפלתם מקסימלית.

28. סכומם של שלושה מספרים הוא 90. המספר השני גדול פי שניים מהראשון. מצא את המספרים בהינתן שמכפלתם מקסימלית.

29. (\*) סכומם של שלושה מספרים אי-שליליים הוא 42. המספר השני גדול פי שניים מהראשון.  
 מצא את המספרים בהינתן שסכום ריבועיהם:

- א. מינימלי.  
 ב. מקסימלי. (נקודת קיצון בקצה תחום ההגדרה של המספרים).

30. סכומם של שלושה מספרים הוא  $18a$  ( $a > 0$ ). המספר השני גדול פי שניים מהראשון.  
 מכפלתם של שלושת המספרים היא מקסימלית.

- א. הבע באמצעות a את שלושת המספרים.

- ב. נתון: מכפלתם המקסימלית של שלושת המספרים היא 192. חשב את סכום שלושת המספרים.

## חקירת פונקציית פולינום

בתרגילים הבאים עליך לחקור את הפונקציות הנתונות באופן מלא לפי הסעיפים:

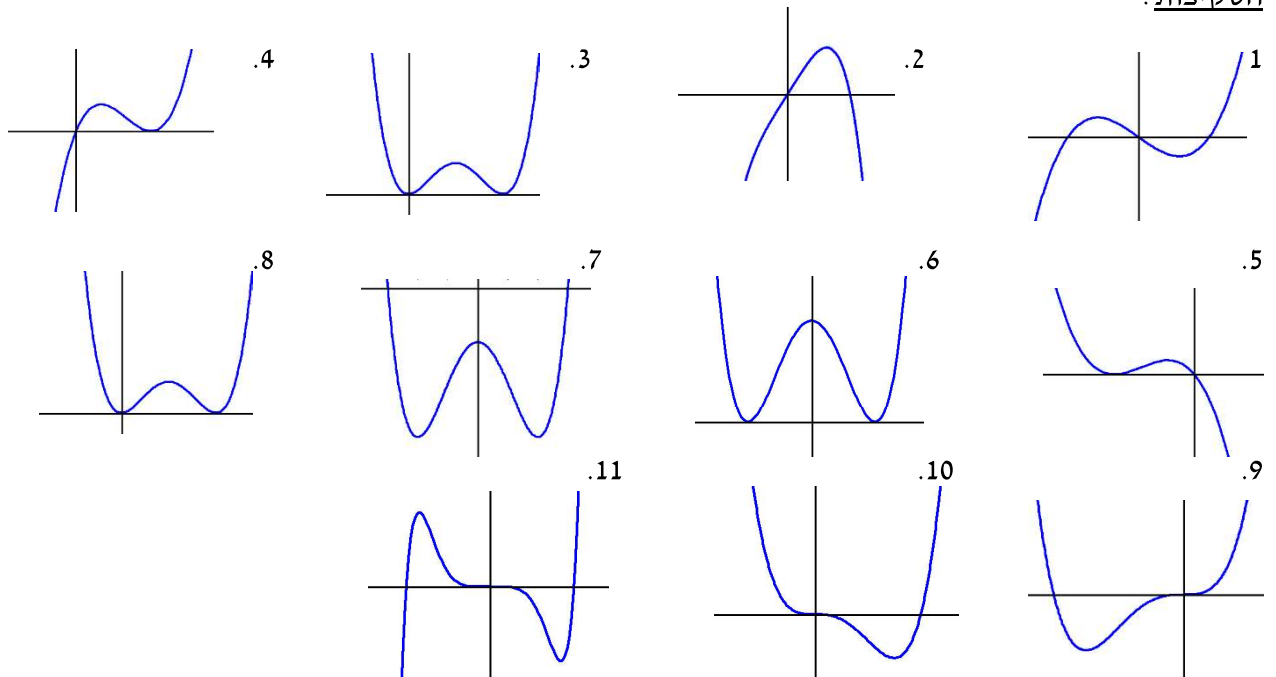
- א. תחום הגדרה.  
 ב. נקודות קיצון וסוגן (במידה ומתקבלת נקודת פיתול, ציין זאת).  
 ג. נקודות חיתוך עם הצירים.  
 ד. תחומי עליה וירידה.  
 ה. סקיצה של הפונקציה.

1.  $y = x^3 - 3x$     2.  $y = -x^4 + 32x$     3.  $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$     4.  $y = x^3 - 2x^2 + x$   
 5.  $y = -4x^3 - 4x^2 - x$     6.  $y = x^4 - 2x^2 + 1$     7.  $y = x^4 - 8x^2 - 9$     8.  $y = x^4 - 6x^3 + 9x^2$   
 עם נקודות פיתול:    9.  $y = x^4 + 4x^3$     10.  $y = 3x^4 - 8x^3$     11.  $y = 5x^7 - 7x^5$

### פתרונות:

1. א. לכל  $x$ . ב.  $\text{Max}(-1, 2)$ ,  $\text{Min}(1, -2)$ . ג.  $(-\sqrt{3}, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{3}, 0)$ . ד. עולה:  $1 < x$  או  $x < -1$ ; יורדת  $-1 < x < 1$ . ה. השרטוט למטה.  
 2. א. לכל  $x$ . ב.  $\text{Max}(2, 48)$ . ג.  $(0, 0)$ ,  $(3.17, 0)$ . ד. עולה:  $x < 2$ ; יורדת  $x > 2$ . ה. השרטוט למטה.  
 3. א. לכל  $x$ . ב.  $\text{Min}(0, 0)$ ,  $\text{Max}(1, 1)$ ,  $\text{Min}(2, 0)$ . ג.  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ . ד. עולה:  $0 < x < 1$  או  $2 < x$ ; יורדת  $1 < x < 2$  או  $x > 2$ . ה. השרטוט למטה.  
 4. א. לכל  $x$ . ב.  $\text{Min}(1, 0)$ . ג.  $\text{Max}\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$ . ד. עולה:  $1 < x$  או  $x < \frac{1}{3}$ ; יורדת  $\frac{1}{3} < x < 1$ . ה. השרטוט למטה.  
 5. א. כל  $x$ . ב.  $\text{Min}(-0.5, 0)$ ,  $\text{Max}\left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{27}\right)$ . ג.  $(-0.5, 0)$ ,  $(0, 0)$ . ד. עולה:  $-0.5 < x < -\frac{1}{6}$ ; יורדת  $-\frac{1}{6} < x$  או  $x < -0.5$ . ה. השרטוט למטה.  
 6. א. לכל  $x$ . ב.  $\text{Min}(1, 0)$ ,  $\text{Max}(0, 1)$ ,  $\text{Min}(-1, 0)$ . ג.  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$ . ד. עולה:  $1 < x$  או  $0 < x < 1$ ; יורדת:  $-1 < x < 0$  או  $x < -1$ . ה. השרטוט למטה.  
 7. א. לכל  $x$ . ב.  $\text{Min}(2, -25)$ ,  $\text{Max}(0, -9)$ ,  $\text{Min}(-2, -25)$ . ג.  $(-3, 0)$ ,  $(0, -9)$ ,  $(3, 0)$ . ד. עולה:  $2 < x$  או  $-2 < x < 0$ ; יורדת  $0 < x < 2$  או  $x < -2$ . ה. השרטוט למטה.  
 8. א. לכל  $x$ . ב.  $\text{Min}(3, 0)$ ,  $\text{Max}(1.5, 5.06)$ . ג.  $(0, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ . ד. עולה:  $0 < x < 1.5$  או  $3 < x$ ; יורדת  $1.5 < x < 3$  או  $x > 0$ . ה. השרטוט למטה.  
 9. א. לכל  $x$ . ב.  $\text{Min}(-3, -27)$ , פיתול  $(0, 0)$ . ג.  $(-4, 0)$ ,  $(0, 0)$ . ד. עולה:  $-3 < x$ ; יורדת  $x < -3$ . ה. השרטוט למטה.  
 10. א. לכל  $x$ . ב.  $\text{Min}(2, -16)$ , פיתול  $(0, 0)$ . ג.  $(0, 0)$ ,  $(2.66, 0)$ . ד. עולה:  $2 < x$ ; יורדת  $x < 2$ . ה. השרטוט למטה.  
 11. א. לכל  $x$ . ב.  $\text{Min}(1, -2)$ , פיתול  $(0, 0)$ . ג.  $(1.18, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(-1.18, 0)$ . ד. עולה:  $1 < x$  או  $x < -1$ ; יורדת:  $-1 < x < 1$ . ה. השרטוט למטה.

### הסקיצות:



**חקירת פונקציית פולינום - כולל פרמטר**

1. לפונקציה  $f(x) = x^4 + ax^3 - ax^2$  יש נקודת קיצון כאשר הנקודה  $x = 1$ . מצא את:

- א. ערכו של הפרמטר a.
- ב. נקודות הקיצון ואת סוגן.
- ג. נקודות החיתוך של גרף  $f(x)$  עם הצירים.
- ה. שרטוט של גרף הפונקציה.
- ו. מצא לאילו ערכי k, הישר  $y = k$  חותך את גרף  $f(x)$  בשתי נקודות בלבד.

2. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = ax^4 + (a-9) \cdot x^2 - 9$  בנקודה בה  $x = -1$  קטן פי 5 משיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה בה  $x = 3$ . מצא את:

- א. ערכו של הפרמטר a.
- ב. נקודות הקיצון ואת סוגן.
- ג. נקודות החיתוך של גרף  $f(x)$  עם הצירים.
- ה. שרטוט של גרף הפונקציה.
- ו. מצא כמה פתרונות יש למשוואה:  $f(x) = -12$ .
- ז. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

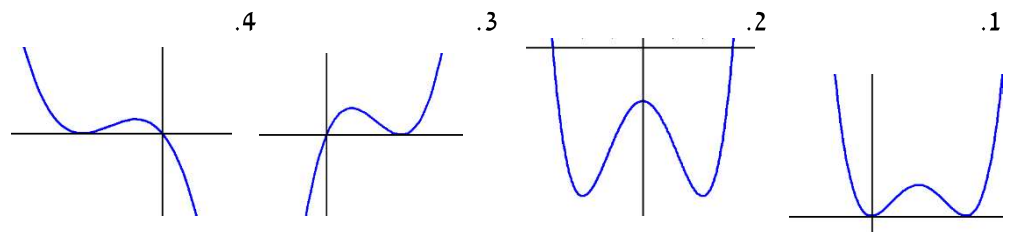
3. אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$  היא  $(1,0)$ . מצא את:

- א. ערכם של הפרמטרים a ו-b.
- ב. נקודות הקיצון ואת סוגן.
- ג. נקודות החיתוך של גרף  $f(x)$  עם הצירים.
- ה. שרטוט של גרף הפונקציה.
- ו. מצא באיזה תחום הפונקציה שלילית ועולה.
- ז. לתלמידי 5 יח' בלבד: הגדירו פונקציה חדשה:  $g(x) = |f(x)|$ . מצא את נקודות הקיצון שלה ואת סוגן.

4. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:  $f(x) = -4x^3 + ax^2 + bx$  בנקודה  $(-1,1)$  הוא -5. מצא את:

- א. ערכם של הפרמטרים a ו-b.
- ב. נקודות הקיצון ואת סוגן.
- ג. נקודות החיתוך של גרף  $f(x)$  עם הצירים.
- ה. שרטוט של גרף הפונקציה.
- ו. מצא באיזה תחום הפונקציה חיובית ויורדת.
- ז. לתלמידי 5 יח' בלבד: הגדירו פונקציה חדשה:  $g(x) = f(x) - p$ . מצא את p שעבורו גרף  $g(x)$  ישיק לציר ה-x בנקודה אחת.

פתרונות: 1) א.  $a = -4$ . ב.  $Min(0,0), Max(1,1), Min(2,0)$ . ג.  $(0,0), (2,0)$ . ד. עולה:  $0 < x < 1$  או  $2 < x < 2$ ; יורדת  $1 < x < 2$  או  $0 > x > 0$ . ה. למטה. ו.  $k = 0$  או  $k > 1$ . ז.  $Min(-2, -25), (3,0), (0,-9), (-3,0)$ . ג. עולה:  $2 < x < 0$  או  $-2 < x < 0$ ; יורדת  $0 < x < 2$  או  $x < -2$ . ה. למטה. ו. ארבעה. ז. חיובית:  $3 < x$  או  $x < -3$ ; שלילית:  $-3 < x < 3$ . א.  $(3)$   $a = 1, b = -2$ . ב.  $(1, 0)$ .  
 2)  $Max(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}), Min(1,0), (0,0)$ . ג. עולה:  $1 < x$  או  $x < \frac{1}{3}$ ; יורדת  $\frac{1}{3} < x < 1$ . ה. למטה. ו.  $x < 0$ . ז.  $(1,0)$ .  
 3)  $Min(0,0), Max(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}), Min(-0.5, 0)$ . א.  $(4)$   $a = -4, b = -1$ . ב.  $Max(-\frac{1}{6}, \frac{2}{27}), Min(-0.5, 0)$ . ג.  $(-0.5, 0), (0,0)$ . ד. עולה:  $-0.5 < x < -\frac{1}{6}$  או  $x < -0.5$ ; יורדת  $-\frac{1}{6} < x < -0.5$  או  $x < -0.5$ . ה. למטה. ו.  $-\frac{1}{6} < x < 0$  או  $x < -0.5$ . ז.  $p = 0, \frac{2}{27}$ .  
 הסקיצות:





5. הפונקציה:  $f(x) = mx^4 + (m+3) \cdot x^3$  יורדת בתחום בו  $x < -3$  ועולה בתחום בו  $x > -3$ . מצא את:

- א. ערכו של הפרמטר  $m$ .  
 ב. נקודות הקיצון ואת סוגן.  
 ג. נקודות החיתוך של גרף  $f(x)$  עם הצירים.  
 ד. שרטוט של גרף הפונקציה.

ה. לתלמידי 5 יח' בלבד: הגדירו פונקציה חדשה:  $g(x) = \frac{1}{3} \cdot f(x)$ . מצא את נקודת הקיצון של  $g(x)$ .

6. לתלמידי 5 יח' בלבד: הפונקציה:  $f(x) = (x-b) \cdot (x+1)^2$  חותכת את ציר ה- $x$  בשתי נקודות שהמרחק ביניהן 6 יח'. מצא את:

- א. ערכו של הפרמטר  $b$  ( $b > -1$ ).  
 ב. נקודות הקיצון ואת סוגן.  
 ג. נקודות החיתוך של גרף  $f(x)$  עם הצירים.  
 ד. תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.  
 ה. שרטוט של גרף הפונקציה.

בתרגילים הבאים יש להשתמש בפרמטר החיובי  $a$  בתשובות, במידת הצורך:

7. נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^4 - 4ax^3 + 4a^2x^2$ . הבע באמצעות הפרמטר החיובי  $a$ , במידת הצורך, את:

- א. נקודות הקיצון ואת סוגן.  
 ב. נקודות החיתוך של גרף  $f(x)$  עם הצירים.  
 ג. תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.  
 ד. שרטוט של גרף הפונקציה.  
 ה. מצא לאילו ערכי  $k$ , הישר  $y = k$  חותך את גרף הפונקציה ב-3 נקודות.  
 ו. שטח המשולש שיוצרות שלוש נקי הקיצון של הפונקציה הוא 32 יח' שטח. מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .

8. נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 - 6ax^2 + 9a^2x$ . הבע באמצעות הפרמטר החיובי  $a$ , במידת הצורך, את:

- א. נקודות הקיצון ואת סוגן.  
 ב. נקודות החיתוך של גרף  $f(x)$  עם הצירים.  
 ג. תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.  
 ד. שרטוט של גרף הפונקציה.  
 ה. מעבירים משיקים לגרף הפונקציה בנקודות הקיצון שלה. המרחק בין המשיקים הוא 108 יח'. מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .

9. לתלמידי 5 יח' בלבד:

(\*) נתונה הפונקציה:  $f(x) = (x^2 - a^2) \cdot (x^2 - 49a^2)$ . הבע באמצעות  $a$ , במידת הצורך, את:

- א. נקודות הקיצון ואת סוגן.  
 ב. נקודות החיתוך של גרף  $f(x)$  עם הצירים.  
 ג. תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.  
 ד. שרטוט של גרף הפונקציה.  
 ה. נתון שעבור  $49 < k$ , הישר  $y = k$  חותך את גרף  $f(x)$  בשתי נקודות בלבד. מצא את הפרמטר  $a$ .

**פתרונות: (5)** א.  $m = 1$ . ב.  $\text{Min}(-3, -27)$ , פיתול  $(0,0)$ . ג.  $(0,0)$ ,  $(-4, 0)$ . ד. למטה. ה.  $\text{Min}(-3, -9)$ .

**(6)** א.  $b = 5$ . ב.  $\text{Max}(-1, 0)$ ,  $\text{Min}(3, -32)$ . ג.  $(5,0)$ ,  $(0, -5)$ ,  $(-1, 0)$ . ד. עולה:  $3 < x$  או  $x < -1$ ; יורדת

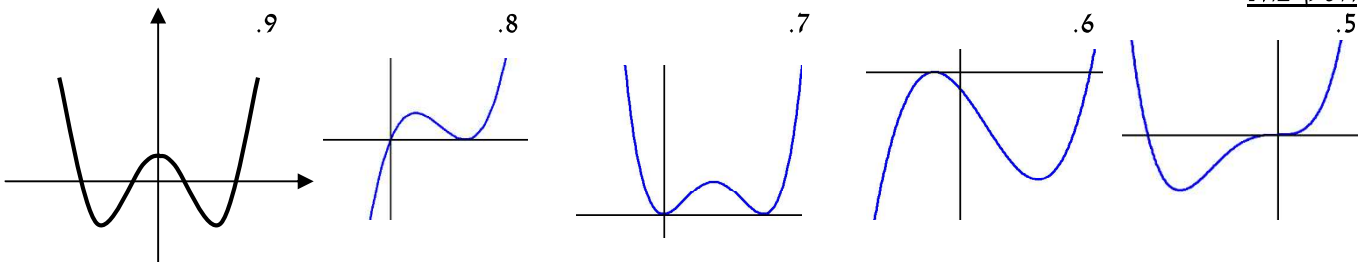
$-1 < x < 3$ . ה. למטה. **(7)** א.  $\text{Min}(0,0)$ ,  $\text{Max}(a, a^4)$ ,  $\text{Min}(2a,0)$ . ב.  $(0,0)$ ,  $(2a,0)$ . ג. עולה:  $2a < x$  או

$0 < x < a$ ; יורדת  $a < x < 2a$  או  $x < 0$ . ד. למטה. ה.  $k = a^4$ . ו.  $a = 2$ . **(8)** א.  $\text{Max}(a, 4a^3)$ ,  $\text{Min}(3a,0)$ .

ב.  $(0,0)$ ,  $(3a,0)$ . ג. עולה:  $3a < x$  או  $x < a$ ; יורדת  $a < x < 3a$ . ד. למטה. ה.  $a = 3$ .

**(9)** א.  $\text{Min}(-5a, -576a^2)$ ,  $\text{Max}(0, 49a^4)$ ,  $\text{Min}(5a, -576a^2)$ . ב.  $(-7a,0)$ ,  $(-a,0)$ ,  $(a,0)$ ,  $(7a,0)$ ,  $(0, 49a^4)$ . ג. עולה:  $5a < x < 0$  או  $-5a < x < 0$ ; יורדת  $0 < x < 5a$  או  $x < -5a$ . ד. למטה. ה.  $a = 1$ .

הסקיצות



**חקירת פונקציית פולינום - סעיפי חשיבה מיוחדים**

**שימו לב!**

מטרתנו של עמוד זה היא תרגול יסודי בסוגים שונים של סעיפי חשיבה המתלווים לחקירת הפונקציה. לאחר חקירת הפונקציה בסעיפים א'-ה' הסטנדרטיים, תופיע סדרה ארוכה של סעיפי חשיבה המתייחסים לחקירה שבוצעה. **מרבית הסעיפים נפתרים תוך שימוש והבנה של גרף הפונקציה  $f(x)$  שכבר שרטטנו, ואינם דורשים חישובים מורכבים ויוצאי דופן כפי שנראה במבט ראשון.**

**סעיפי החקירה הבסיסית:**

א) חקור את הפונקציה:  $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$  לפי הסעיפים הבאים:

1. תחום הגדרה.
  2. נקודות החיתוך עם הצירים.
  3. נקודות הקיצון וסוגן.
- ב) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

**סעיפי חקירה מתקדמים המתייחסים לחקירה שכבר בוצעה:**

- ג) מצא עבור אילו ערכי  $x$ :
  1. מתקיים עבור גרף הפונקציה:  $f(x) > 0$ .
  2. מתקיים עבור הנגזרת:  $f'(x) < 0$ .
- ד) מבלי לפתור ישירות את המשוואה, מצא כמה פתרונות יש למשוואה  $f(x) = 100$ .
- ה) מצא עבור אילו ערכי  $m$ , לישר  $y = m$  יהיו ארבע נקודות חיתוך עם גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ו) מצא עבור אילו ערכי  $k$ , למשוואה  $f(x) = k$  יהיו שלושה פתרונות.
- ז) מצא עבור אילו ערכי  $p$ , הישר  $y = p$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ח) מצא עבור אילו ערכי  $n$ , הישר  $x = n$  חותך את גרף הפונקציה בנקודה הנמצאת על אחד הצירים.

**סעיפי חקירה מתקדמים המתייחסים להגדרת פונקציה חדשה:**

- ט) מגדירים פונקציה חדשה:  $g(x) = -f(x)$ .
  1. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .
  2. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של גרף הפונקציה  $g(x)$ .
  3. מצא עבור אילו ערכי  $k$ , הישר  $y = k$  אינו חותך את גרף הפונקציה  $g(x)$ .
- י) מגדירים פונקציה חדשה:  $h(x) = 2 \cdot f(x)$ .
  1. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $h(x)$ .
  2. מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה  $h(x)$  בשתי נקודות שונות.
  3. חשב את שטח המשולש שקודקודיו הם נקודות הקיצון של גרף הפונקציה  $h(x)$ .

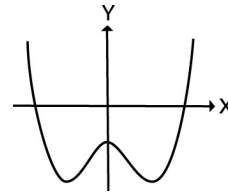
- יא) מגדירים פונקציה חדשה:  $p(x) = f(x) + 9$ .
  1. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $p(x)$ .
  2. מצא כמה פתרונות יש למשוואה  $p(x) = 0$ .

- יב) מגדירים פונקציה חדשה:  $n(x) = |p(x)|$ .
  1. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $n(x)$ .
  2. מצא כמה נקודות קיצון יש לגרף הפונקציה  $n(x)$ .

**חקירת פונקציית פולינום - סעיפי חשיבה מיוחדים (פתרונות)**

**פתרונות:**

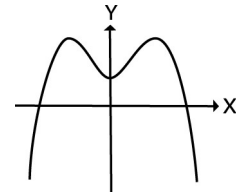
א. 1) כל  $x$ . 2)  $(-3, 0)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(0, -9)$ . 3)  $\min(2, -25)$ ,  $\max(0, -9)$ ,  $\min(-2, -25)$ .  
 ב. השרטוט:



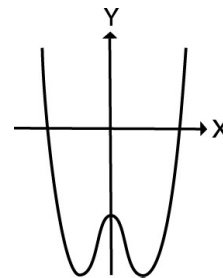
- ג. 1)  $3 < x$  או  $x < -3$ . 2)  $0 < x < 2$  או  $x < -2$ .
- ד. שניים.
- ה.  $-25 < m < -9$ .
- ו.  $k = -9$ .
- ז.  $p = -9, -25$ .
- ח.  $n = -3, 0, 3$ .

**סעיפי חקירה מתקדמים המתייחסים להגדרת פונקציה חדשה:**

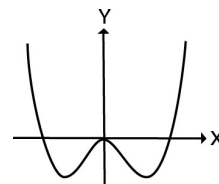
ט. 1) השרטוט: 2)  $\max(-2, 25)$ ,  $\min(0, 9)$ ,  $\max(2, 25)$ . 3)  $k > 25$ .



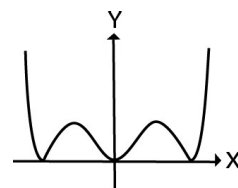
י. 1) השרטוט: 2)  $y = -50$ . 3) 64 יח"ר.



יא. 1) השרטוט: 2) שלושה.

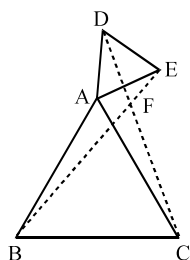


יב. 1) השרטוט: 2) חמש.



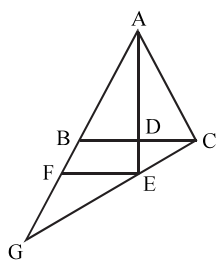
# עבודת קיץ – גיאומטריה (5 יחידות)

בעיות עם משולשים ומרובעים (כולל פרופורציה ודמיון)

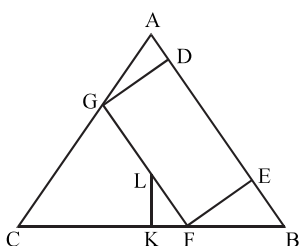


1. המשולשים ABC ו- ADE הם משולשים שווים-צלעות. הקטעים BE ו- CD נחתכים בנקודה F.  
 א. הוכח:  $BE = CD$ .  
 ב. הוכח:  $\angle ACD = \angle ABE$ .  
 ג. חשב את הזווית BFC.

תשובה: ג.  $60^\circ$ .

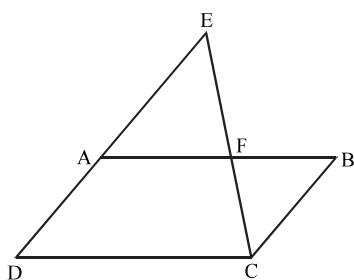


2. הנקודה D נמצאת על הצלע BC של משולש שווה-שוקיים ABC ( $AB = AC$ ). הנקודה G היא נקודה על המשך הצלע AB. הקטע FE מקביל ל-BC. הוכח:  $AE \perp BC$ . נתון:  $\frac{GF}{BF} = \frac{AG}{AC}$ .

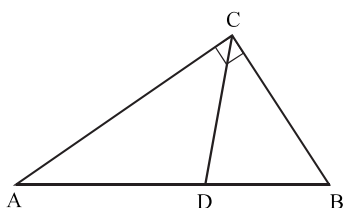


3. במשולש שווה-שוקיים ABC ( $AC = AB$ ) חסום מלבן GFED (ראה ציור). נקודה L, הנמצאת על צלע המלבן GF, היא מפגש התיכונים במשולש ABC. דרך הנקודה L העבירו אנך לצלע BC, החותך את BC בנקודה K. הוכח:  $\triangle KAB \sim \triangle KLF \sim \triangle EFB$ . נתון:  $BC = 18$  ס"מ,  $AB = 15$  ס"מ. חשב את אורכי הקטעים KF ו- EF.

תשובה: ב. 3 ס"מ, 4.8 ס"מ.

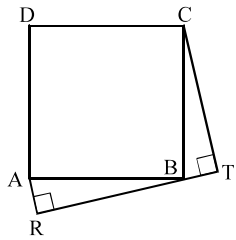


4. המרובע ABCD הוא מקבילית (ראה ציור).  
 א. הוכח:  $\frac{BF}{FA} = \frac{AD}{AE}$ .  
 ב. (1) הוכח:  $\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{AD}{AE}$ .  
 (2) היעזר בסעיף א' ובתת סעיף ב' (1), והוכח:  $S_{\triangle ADF} = S_{\triangle BEF}$ .



5. במשולש ישר-זווית ACB ( $\angle ACB = 90^\circ$ ) חוצה-זווית ACB (ראה ציור).  
 א. (1) הוכח:  $DB \cdot AC = BC \cdot AB - BC \cdot DB$ .  
 (2) נתון:  $BC = 21$  מ"מ,  $AC = 28$  מ"מ. חשב את האורך של הקטע DB.  
 ב. מקדקוד C מורידים אנך ליתר AB. האנך חותך את היתר בנקודה N. הוכח כי  $\frac{CN}{AC} = \frac{BC}{AB}$ .  
 ג. חשב את האורך של הקטע DN.

**תשובה:** א. (2) 15 מ"מ. ג. 2.4 מ"מ.

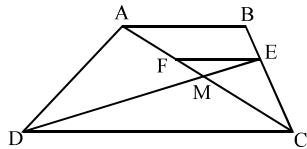


6. נתון ריבוע ABCD.  
 דרך הקדקוד B העבירו ישר TR.  
 AR ו-CT מאונכים לישר זה (ראה ציור).  
 א. הוכח כי  $AR + CT = TR$ .  
 ב. הבע את שטח המרובע ACTR באמצעות TR.

**תשובה:** ב.  $\frac{1}{2}(TR)^2$ .

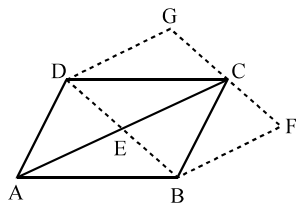
7. הוכח: אורך התיכון במשולש קטן מהמוצע של אורכי שתי הצלעות שלידו. **הדרכה:** הארך את התיכון כאורכו.

8. בטרפז ABCD ( $AB \parallel DC$ ) מתקיים  $DC = 2AB$ .  
 הנקודה E נמצאת על השוק BC כך ש- $BC = 3BE$ .  
 הנקודה F נמצאת על האלכסון AC כך ש- $FE \parallel DC$  והקטע DE נחתכים בנקודה M.

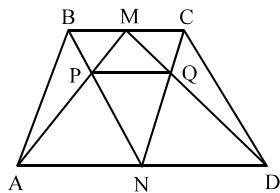


- א. חשב את היחסים: (1)  $\frac{FE}{AB}$  . (2)  $\frac{FE}{DC}$ .  
 ב. הוכח:  $MC = 3FM$ .  
 ג. חשב את היחס  $\frac{AM}{MC}$ .

**תשובה:** א. (1)  $\frac{2}{3}$  . (2)  $\frac{1}{3}$  . ג.  $\frac{AM}{MC} = 1$ .

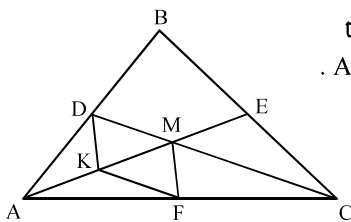


9. המרובעים ABCD ו-BFGD הם מקביליות.  
 נתון:  $CG = CF$  (C על הקטע GF).  
 א. הוכח: המרובע ECGD הוא מקבילית.  
 ב. הוכח: אם המקבילית ABCD היא מעוין, אז המרובע ECGD הוא מלבן.

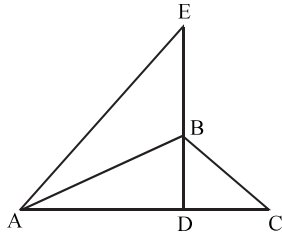


10. בטרפז ABCD ( $BC \parallel AD$ ) הנקודות M ו-N הם אמצעי הבסיסים, הקטעים DM ו-CN נחתכים בנקודה Q, AM ו-BN נחתכים בנקודה P (ראה ציור).  
 א. הוכח:  $PQ \parallel AD$ .  
 ב. נתון גם:  $AD = 2a$ ,  $BC = a$ .  
 הבע באמצעות a את אורך הקטע PQ.

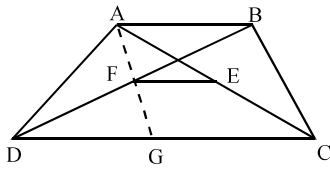
**תשובה:** ב.  $\frac{2}{3}a$ .



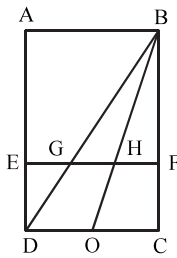
11. התיכונים AE ו-CD במשולש ABC נפגשים בנקודה M. נקודה K היא אמצע הקטע AM. F היא נקודה על הצלע AC כך ש- $KF \parallel DC$  (ראה ציור).  
 הוכח: המרובע KDMF הוא מקבילית.



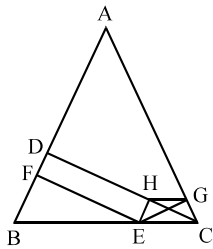
12. במשולש  $ABC$ , הגובה לצלע  $AC$  הוא  $BD$ . נקודה  $E$  נמצאת על המשך הגובה  $BD$ , כך ש- $AB$  חוצה את הזווית  $EAC$  (ראה ציור). נתון:  $\angle BCA = 2 \cdot \angle BAC$ .  
 א. הוכח:  $BC \cdot ED = BD \cdot EA$ .  
 ב. היעזר בנתונים ובסעיף א', והוכח:  $BC \cdot ED = AD \cdot BE$ .



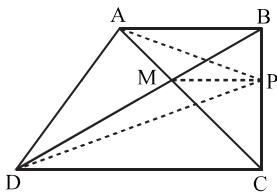
13. בטרפז  $ABCD$  ( $AB \parallel DC$ ) הנקודות  $E$  ו- $F$  הן אמצעי האלכסונים  $AC$  ו- $BD$ , בהתאמה. המשך הקטע  $AF$  חותך את  $DC$  בנקודה  $G$ .  
 א. הוכח:  $FE \parallel DC$ .  
 ב. הוכח:  $S_{ADG} = S_{ABD}$ .



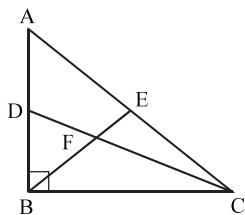
14. הנקודה  $O$  היא אמצע הצלע  $DC$  של מלבן  $ABCD$ .  $EF$  מקביל ל- $DC$  וחותך את  $BD$  ואת  $BO$  בנקודות  $G$  ו- $H$  (ראה ציור).  
 א. הוכח:  $GH = HF$ .  
 ב. נתון גם:  $EG = GH$ . מצא את היחס  $\frac{FC}{BF}$ .  
**תשובה:** ב.  $\frac{1}{2}$ .



15. במשולש  $ABC$ ,  $CD$  הוא הגובה לצלע  $AB$ . מנקודה  $E$  שעל הצלע  $BC$  העבירו אנכים  $EF$  ו- $EG$  לצלעות  $AB$  ו- $AC$ . הנקודה  $H$  נמצאת על הקטע  $DC$ , כך שהמרובע  $CEHG$  הוא טרפז שווה-שוקיים ( $GH \parallel CE$ ).  
 א. הוכח:  $CG = DF$ .  
 ב. הוכח:  $AB = AC$ .

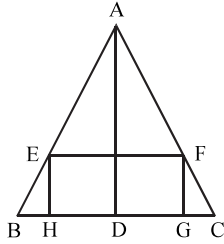


16. המרובע  $ABCD$  הוא טרפז ישר-זווית ( $\angle BCD = 90^\circ$ ,  $AB \parallel CD$ ) שאלכסוניו נחתכים בנקודה  $M$ .  $MP$  מקביל לבסיסים.  
 א. הוכח:  $\frac{AB}{DC} = \frac{BP}{PC}$ .  
 ב. הוכח:  $\triangle ABP \sim \triangle DCP$ .



17. משולש  $ABC$  הוא משולש ישר-זווית ( $\angle ABC = 90^\circ$ ),  $BE$  הוא תיכון לצלע  $AC$ , ו- $CD$  הוא תיכון לצלע  $AB$ . התיכונים  $BE$  ו- $CD$  נחתכים בנקודה  $F$ .  
 א. חשב את היחס בין היקף המשולש  $BFC$  להיקף המשולש  $EFD$ .  
 ב. נתון גם כי הנקודה  $M$  היא אמצע הקטע  $FC$ , והנקודה  $N$  היא אמצע הקטע  $FB$ . הוכח כי המרובע  $DEM N$  הוא מקבילית.

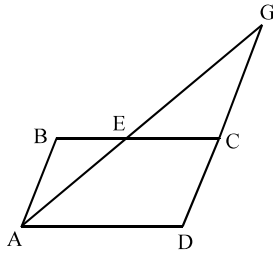
**תשובה: א. 2.**



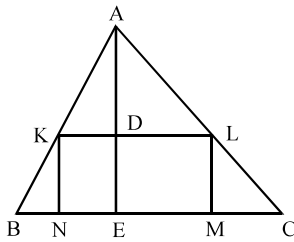
18. במשולש שווה-שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) חסום מלבן EFGH, כך שהאלכסון HF מאונך לשוק AC. AD הוא תיכון לבסיס BC. נתון:  $AD = BC$ .  
 א. הוכח:  $\frac{GC}{FG} = \frac{1}{2}$ .  
 ב. הוכח:  $\Delta HGF \sim \Delta FGC$ .  
 ג. נתון: 10 ס"מ  $HG =$ . מצא את GC.

**תשובה: ג. 2.5 ס"מ.**

19. במקבילית ABCD נקודה E נמצאת על הצלע BC, כך ש- $\frac{BE}{CE} = \frac{a}{b}$ . המשך הקטע AE חותך את המשך הצלע DC בנקודה G. נתון כי שטח המשולש CEG הוא S. הבע באמצעות a, b ו-S:  
 א. את שטח המשולש ABE.  
 ב. חשב את שטח המשולש ADG.  
 ג. את שטח המקבילית ABCD.

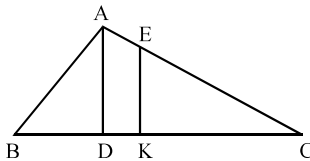


- תשובה: א.**  $\frac{a^2 S}{b^2}$ . **ב.**  $\frac{(a+b)^2 S}{b^2}$ . **ג.**  $\frac{2a(a+b)S}{b^2}$ .



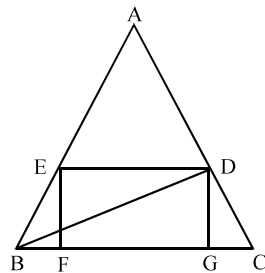
20. במשולש ABC חסום מלבן KLMN. הגובה AE לצלע BC חותך את צלע המלבן KL בנקודה D. נתון: 6 ס"מ  $BC =$ ,  $KL = 2KN$ ,  $AE = h$ . הבע באמצעות h:  
 א. את אורך הקטע AD.  
 ב. את יחס השטחים:  $\frac{S_{AKD}}{S_{KBN}}$ .

- תשובה: א.**  $\frac{h^2}{h+3}$ . **ב.**  $\frac{h^2}{9}$ .



21. מנקודה K שעל הצלע BC במשולש ABC, העלו אנך KE. AD הוא הגובה לצלע BC. נתון: 14 ס"מ  $BD =$ , 36 ס"מ  $DC =$ , ושטח המשולש EKC הוא חצי משטח המשולש ABC. מצא את אורך הקטע CK.

**תשובה: 30 ס"מ.**



22. במשולש שווה-שוקיים ABC ( $AB = AC$ ), חסום מלבן DEFG. BD חוצה את הזווית ABC ומחלק את השוק AC כך ש- $AD:DC = 2:1$ . נתון:  $BC = 2a$ . בטא באמצעות a:  
 (1) את אורכי הקטעים AD ו-DC.  
 (2) את שטח המלבן DEFG.

- תשובה: (1)**  $2\frac{2}{3}a$ ,  $1\frac{1}{3}a$ . **(2)**  $\frac{4\sqrt{15}}{9}a^2$ .